学校编号： 10384　　　　分类号：＿＿＿＿密级：＿＿＿＿

学　　号： 200423032　　UDC:＿＿＿＿＿＿＿＿

厦 门 大 学

硕 士 学 位 论 文

多项分数阶常微分方程数值方法及其应用

Numerical Methods Of Multi-order Fractional Ordinary Differential Equations And Applications

尹 翠 影

指导教师姓名：刘发旺　教授

申请学位级别：硕 士 学 位

专 业 名 称：计 算 数 学

论文提交日期：2007 年 4 月

论文答辩日期：2007 年 5 月

学位授予单位：厦 门 大 学

学位授予日期：2007 年 月

答辩委员会主席：＿＿＿＿＿＿＿＿

评阅人：＿＿＿＿＿＿＿＿

2007 年 4 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果．本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明．本人依法享有和承担由此论文而产生的责任．

声明人 (签名):

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定．厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版．保密的学位论文在解密后适用本规定．

本学位论文属于

1. 保密（ ），在 年解密后适用本授权书．

2. 不保密（ ）

（请在以上相应括号内打”✓”）

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

目 录

Content

摘 要

近年来，分数阶微积分在数学模型中的应用越来越普遍，许多科学工程领域都涉及到分数阶计算，例如：生物系统 [25]，物理学 [16]，化学和生物化学 [26]，水文地理学应用 [14]，分数阶控制 [24]，聚合体流变学 [20] 和黏弹性分数阶导数 [18] 等. 带有分数阶阻尼的非线性动力学系统在工程学、地震波衰减和聚合体流变学 [20] 中也非常重要. 与整数阶模型相比，分数阶模型的显著优点在于它有着深厚的物理背景，因此，取代于一般整数阶导数而含有分数阶导数的黏弹性模型是一个比较热门的研究课题. 我们知道带有黏弹性阻尼的分数阶模型很早就吸引了研究者的注意，但是，由于缺乏较恰当的数学方法，对分数阶计算的理论分析和数值方法的研究还是比较困难的课题.

本文考虑了多项分数阶常微分方程数值方法问题. 第二章，考虑分数阶常微分方程 —endolymph 方程，给出其解的存在性和唯一性，导出了用格林函数表示其解析解，并且利用算子方法也可以解出它的精确解. 我们很明显的可以看出它的解析解和精确解很难数值的表示出来的，于是我们便提出一种计算有效的方法，即预估 - 校正方法，来求出它的数值解. 第三章，考虑一系列带有分数阶阻尼的非线性动力学系统，把问题转化为分数阶微分方程组，并用预估 - 校正方法对其进行数值模拟，然后把这种方法应用到解带有分数阶阻尼的不可延长性和可延长性摆动方程. 在每一部分，都给出了数值例子，证实了所提出的数值方法的有效性，这种数值方法也适用于求解一般的分数阶常微分方程.

关键词： 分数阶导数；数值方法；误差分析

Abstract

The use of fractional differential and integral operator in mathematical has become increasingly widespread in recent years. Various field of science and engineering involved fractional calculation. For example, system biology [25], physics [16], Chemistry and biochemistry[26], hydrology application [14], fractional-order controllers [24], polymer rheology [20], and fractional derivative viscoelastic [18]. Nonlinear dynamical systems with fractional damping also play an important role in engineering, seismic wave attenuation and polymer rheology [20]. The most significant advantage of the fractional order models in comparison with integer-order models is based on important fundamental physical considerations. So viscoelastic models involving fractional derivatives instead of common derivatives are a good research issue. It is known that fractional model of viscous damping have long been attracted the attention of investigators. However, because of the absence of appropriate mathematical methods, numerical methods and theoretical analysis of fractional calculation are very difficult tasks.

In this paper, we consider the numerical method of multi-term fractional ordinary differential equations. In the second chapter, The fractional endolymph equation is considered, the existence and uniqueness of solution for the fractional-order Endolymph equation is given. The analytical solution of the fractional-order endolymph equation is derived by the corresponding Green's function. And we can obtain its exact solution by the operational method. Obviously, it is difficult showing its analytical solution and its exact solution numerically. Then the Predictor-Corrector method is proposed for solving the fractional differentional equations of endolymph for its numer-

ical solution. In the third chapter, the nonlinear fractional dynamical systems with fractional damping is considered, the problem is transferred into a system of fractional-order ordinary differential equations. A computationally effective fractional Predictor-Corrector method is used to simulate it. Numerical examples are presented in every chapter, which verify the efficiency of the above numerical method. The techniques can also be applied to deal with other generic fracitonal-order ordinary equations.

Keywords: Fractional derivative , Numerical method, Error analysis.

第一章 序 言

近几十年来，人们渐渐发现分数阶计算在很多科学工程领域中发挥了越来越重要的作用. 特别在生物 [25], 物理 [16], 化学和生物化学 [26], 水文地理学应用 [14], 分数阶控制 [24], 聚合体流变学 [20], 黏弹性分数阶导数 [18] 等领域，分数阶导数的计算是一个有用的数学工具. 越来越多的文献也已经论述了用分数阶方程来解决各种学科和工程中的动力系统问题. 与整数阶模型相比，分数阶模型的显著优点在于它有着坚实的实用背景和物理解释.

但是, 随着对分数阶微分方程研究的深入, 人们注意到有些分数阶微分方程的解析解大多由比较特殊的函数来表示，而要数值地表示这些特殊的函数是很困难的，并且有些特殊的非线性微分方程的解析解是不可能解出来的. 于是，人们便对对分数阶微分方程的数值方法产生了兴趣. 如 Diethelm 等人 [12] 提出了用分数阶 Adams 法解非线性常微分方程. Lin 和 Liu[21] 导出了用一高阶逼近来解分数阶常微分方程. Liu 和 yang[24] 用预估 - 校正方法来数值模拟分数阶控制系统等等.

本文分别考虑了分数阶 endolymph 微分方程和多项非线性分数阶常微分方程的数值方法. 在第二章，考虑分数阶常微分方程 —endolymph 方程，给出分数阶 endolymph 微分方程解的存在性和唯一性，导出了用格林函数表示其解析解，然后用算子方法求出了它的精确解，由于分数阶 Endolymph 微分方程的解析解和精确解很难被数值地表达出来，于是我们又提出一种计算有效的方法，即预估 - 校正方法，从而可得到它的数值解. 数值例子也证实了我们的数值方法的有效性. 第三章，考虑一系列带有分数阶阻尼的非线性动力学系统，把问题转化为分数阶常微分方程组，并用预估 - 校正方法对其进行数值模拟，然后把这种方法应用到解带有分数阶阻尼的不可延长性和可延长性摆动方程. 此方法的优点在于这些摆动方程的能量函数中包含了摆动方程的解的一阶导数项，而用预估 - 校正方法我们可以很容易地数值模拟出方程解的任意阶导数，因此，这就大大方便了我们对其能量函数的数值求解. 最后，也给

出了数值例子来说明. 在每一部分的数值例子中我们都不但给出了方程解的性态, 也给出了方程的解在不同分数阶导数下的性态. 从中, 我们可看出本文中所提出的数值方法也适用于求解一般的线性和非线性分数阶常微分方程.

第二章 解分数阶 Endolymph 微分方程的一些计算技巧

§2.1 分数阶 endolymph 微分方程

在医学上，前庭器官是一个平衡感应器，它由颞骨远端的骨小管与腔性结构组成，称之为骨迷路，在其内是由膜性组织形成的膜迷路，它是前庭器官的功能部分. 膜迷路主要有耳蜗、三个半规管及两个大的腔：椭圆囊和球囊组成 [1,p.414]. 三个半规管分别是前半规管、后半规管和水平半规管，它们分布在三个成直角的平面上，每个半规管的末端都有一膨大部分形成壶腹，半规管内充满一种粘性液体－－内淋巴液，壶腹内有一与内淋巴液密度一致的胶质性的隔，称之为壶腹嵴. 当头突然旋转时，由于内淋巴液的惯性作用，它的运动将晚于半规管本身的运动，即半规管随头部运动开始旋转时，内淋巴液仍是静止的，这样形成了内淋巴液的相对运动，这种相对流动持续几秒钟，其方向与头部旋转方向相反，数秒钟后这种液体的相对运动激活半规管内的受体，然后人体（大脑）便收到这种加速度的刺激；当旋转突然停止时，发生相反的效应，即半规管突然停止运动时，内淋巴液在惯性作用下继续运动，半规管内的受体从相反的方向上被激活，随后大脑便接收到这一信息 [1,p.416]. 在这里我们主要的工作就是研究这种现象的数学模型并获得这种运动方程的一些解题技巧. 关于半规管内的淋巴液对于角加速度的反应，比较热门的模型还是 Wilhelm Steinhausen 提出的方程形式：

$$\theta'' + \frac{B}{J}\theta' + \frac{K}{J}\theta = -\alpha(t)$$

这里 θ, θ' 和 θ'' 分别表示内淋巴相对于导管的平均角度转位、平均速度和平均加速度，系数 J 是惯性项－内淋巴的质量和分布，阻尼系数 B 记为粘性力对于内淋巴平均角速度的扭矩的比率， K 表示壶腹嵴内液体的稠密性.

象 De Vries[2] 假定的那样，基于半规管的兼具黏着性与伸缩性的本质特

性, 因此当内淋巴液做相对运动时会受到胶状层里粘力的阻扰. 所有以前的工作大都忽落了这些力的存在. 我们知道分数阶导数是一个有力的工具来模仿这种带有阻尼物资的系统, 用分数阶导数模型来表示这种阻尼特性在 [3] 已经提到, 但是它只给出了分数阶为 1/2 的情况, 即分数阶 endolymph 微分方程 [3] ：

$$D_t^2 x(t) + aD_t x(t) + bD_t^{1/2} x(t) + cx(t) = -\alpha(t), 0 < t < T \tag{2.1}$$

其中 a 、b 、c 分别表示常数项系数, $-\alpha(t)$ 表示角形加速度, 线性算子 $D_t^{1/2}$ 被定义为:

$$D_t^{1/2} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \frac{d}{dt} \int_0^T \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^{(}1/2)} d\tau \tag{2.2}$$

方程 (2.1) 的精确解在参考文献 [3] 中已给出. 在这篇文章中, 我们考虑分数阶 endolymph 微分方程的一般形式:

$$D_t^2 x(t) + aD_t x(t) + bD_t^{\beta} x(t) + cx(t) = -\alpha(t), 0 < t < T \tag{2.3}$$

及初值条件:

$$x(0) = x_0^{(0)}, x'(0) = x_0^{(1)} \tag{2.4}$$

这里 D_t^{β} 是 Riemann-Liouville 分数阶导数, 且 $0 < \beta < 1$.

定义 1 ：(Riemann-Liouville 定义的分数阶导数) [4] ：

$$D_t^{\beta} f(t) = \begin{cases} \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int\limits_0^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\beta+1-m}} \right], & 0 \le m-1 < \beta < m, \\ \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), & \beta = m \in N. \end{cases} \tag{2.5}$$

类似的 Riemann-Liouville 定义的分数阶积分为:

$$D_t^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau, \beta > 0 \tag{2.6}$$

首先, 我们证明分数阶 endolymph 微分方程的一般形式解的存在性与唯一性, 导出分数阶 endolymph 微分方程一般形式的解析解. 并提出两种计算有效的

方法，即算子方法和预估 - 校正方法，可分别求出它的精确解和数值解. 最后给出数值例子给以验证.

§2.2 分数阶 endolymph 微分方程解的存在性与唯一性

为求分数阶 endolymph 微分方程 (2.3) 及初值条件 (2.4) 的解析解，我们首先要证明它的解的存在性与唯一性.

引理 2.1 ：如果 $f(t) \in L_1(0,T)$, 那么方程

$$y''(t) = f(t) \tag{2.7}$$

有唯一的解 $y(t) \in L_1(0,T)$, 且满足初值条件

$$y(0) = y_0^{(0)}, y'(0) = y_0^{(1)}. \tag{2.8}$$

对于分数阶 endolymph 微分方程:

$$D_t^2 x(t) + aD_t x(t) + bD_t^\beta x(t) + cx(t) = -\alpha(t), 0 < t < T \tag{2.9}$$

及初值条件:

$$x(0) = x_0^{(0)}, x'(0) = x_0^{(1)} \tag{2.10}$$

这里 a 、 b 、 c 是不为零的常数， $-\alpha(t) \in L_1(0,T)$, 即:

$$\int_0^T |-\alpha(t)|dt < \infty$$

为了简单起见，以下假设当 $t > T$ 时， $-\alpha(t) \equiv 0$.

定理 2.1 如果 $-\alpha(t) \in L_1(0,T)$, 那么方程 (2.9) 有唯一的解 $x(t) \in L_1(0,T)$, 且满足初值条件 (2.10).

证 首先假设问题 (2.9) 及初值条件 (2.10) 有一个解 $x(t)$, 且可记为

$$D_t^2 x(t) = \phi(t) \tag{2.11}$$

这里 $\phi(t) = -\alpha(t) - aD_t x(t) - bD_t^{\beta} x(t) - cx(t)$.
由引理 2.1, 得到

$$x(t) = D_t^{-2}\phi(t) = \int_0^t (t-\tau)\phi(\tau)d\tau \tag{2.12}$$

将方程 (2.11) 代入方程 (2.9), 得到

$$\phi(t) + aD_t(D_t^{-2}\phi(t)) + bD_t^{\beta}(D_t^{-2}\phi(t)) + cD_t^{-2}\phi(t) = -\alpha(t) \tag{2.13}$$

因为 $0 < \beta < 1$, 所以 (2.12) 式又可以化为:

$$\phi(t) + aD_t^{-1}\phi(t) + bD_t^{\beta-2}\phi(t) + cD_t^{-2}\phi(t) = -\alpha(t)$$

即:

$$\phi(t) + a\int_0^t \phi(\tau)d\tau + \frac{b}{\Gamma(2-\beta)}\int_0^t (t-\tau)^{1-\beta}\phi(\tau)d\tau + c\int_0^t (t-\tau)\phi(\tau)d\tau = -\alpha(t)$$

由此得到函数 $\phi(t)$ 的第二类 Volterra 积分方程:

$$\phi(t) + \int_0^t K(t,\tau)\phi(\tau)d\tau = -\alpha(t) \tag{2.14}$$

这里

$$K(t,\tau) = a + b\frac{(t-\tau)^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} + c(t-\tau)$$

此时核函数 $K(t,\tau)$ 可以写成弱奇异核函数的形式:

$$K(t,\tau) = \frac{K^*(t,\tau)}{(t-\tau)^{1-\mu}} \tag{2.15}$$

这里, 当 $0 \le t < T$, $0 \le \tau < T$, $0 < \beta < 1$ 时, $K^*(t,\tau)$ 是连续的, 且 $\mu = \min\{2, 1-\beta\}$. 显然, $0 < \mu \le 1$. 由 [5] 可知, 具有弱奇异核函数 (2.14) 及右端项 $-\alpha(t) \in L_1(0,T)$ 的方程 (2.9) 及初值条件 (2.10) 有唯一解 $\phi(t) \in L_1(0,T)$. 因此由引理 2.1, 可以得到问题 (2.9),(2.10) 有唯一解 $x(t) \in L_1(0,T)$. 同时这解可用公式 (2.11) 来决定. 即定理 2.1 得证.

§2.3 分数阶 endolymph 方程的解析解

分数阶 endolymph 微分方程 (2.1) 的精确解在 [3] 中已经提出，下面我们用另一种方法来求分数阶 endolymph 微分方程的一般形式 (2.3) 及初值条件 (2.4) 的解析解. 这种方法就是利用常系数四项分数阶微分方程的格林函数 [1] 来表示它的解析解，类似于沈和刘 [6] 求解分数阶 Bagley-Torvik 方程的解析解.

对方程 (2.3) 进行拉普拉斯变换，由 $L(D_t^{\beta}x(t)) = s^{\beta}\bar{X}(s)$ 得：

$$s^2\bar{X}(s) + as\bar{X}(s) + bs^{\beta}\bar{X}(s) + c\bar{X}(s) = -\bar{\alpha}(s) \tag{2.16}$$

得：

$$\bar{X}(s) = \frac{-\bar{\alpha}(s)}{s^2 + as + bs^{\beta} + c} \tag{2.17}$$

令 $g_4(s) = \frac{1}{s^2+as+bs^{\beta}+c}$,$g_4(s)$ 又可以被写成如下形式：

$$\begin{aligned}
g_4(s) = {} & \frac{1}{s^2+as}\frac{1}{1+\frac{bs^2+c}{s^2+as}} \\
= {} & \frac{s^{-1}}{s+a}\frac{1}{1+\frac{bs^{\beta-1}+cs}{s+a}} \\
= {} & \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{s^{-1}}{(s+a)^{m+1}}(bs^{\beta-1}+cs)^m \\
= {} & \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{s^{-1}}{(s+a)^{m+1}}\sum_{k=0}^{m}\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} b^k c^{m-k} s^{k\beta-m} \\
= {} & \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m c^m \sum_{k=0}^{m}\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{b}{c}\right)^k \frac{s^{k\beta-m-1}}{(s+a)^{m+1}}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

基于拉普拉斯变换的一般展开定理 [7], 逐项求拉普拉斯的逆变换，我们可以得到公式 (2.18) 的拉普拉斯逆变换：

$$G_4(t) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(-c)^m \sum_{k=0}^{m}(mk)\left(\frac{b}{c}\right)^k t^{2(m+1)-k\beta-1}E_{1,2+m-k\beta}^{(m)}(-at)$$